GRUNDRECHNUNGSARTEN

I Rechenarten erster Stufe: ADDITION und SUBTRAKTION

Die uns vertrauteste Operation für Zahlen ist die Addition. Zwei reelle Zahlen können addiert werden, und die Summe ist wieder eine reelle Zahl,

z.B. $12 + 1 = 13$

(dabei heißen 12 und 1 Summanden). Diese Operation kann vollständig innerhalb der kleineren Zahlenmengen N, N_0, Z und Q durchgeführt werden: Die Summe zweier natürlicher (ganzer, rationaler) Zahlen ist wieder eine natürliche (ganze, rationale) Zahl.

Aus der Addition leitet sich (gewissermaßen als "Umkehrung") eine weitere Operation ab: die Subtraktion zweier reeller Zahlen. Wir veranschaulichen sie anhand eines Beispiels:

Die Differenz: $13 - 12$

ist definiert als die Antwort auf die Frage: "12 + wieviel = 13?"

oder, anders ausgedrückt: "Wieviel fehlt 12 auf 13?" Die Antwort lautet natürlich 1, und daher ist $13 - 12 = 1$. Die Subtraktion kann also vollständig auf die Addition zurückgeführt werden.

De Subtraktion kann vollständig innerhalb der Zahlenmengen Z und Q durchgeführt werden: Die Differenz zweier ganzer (rationaler) Zahlen ist wieder eine ganze (rationale) Zahl. Aus der Menge N der natürlichen Zahlen kann die Subtraktion allerdings hinausführen: So ist etwa $3 \in N$ und $5 \in N$, aber $3 - 5 = -2 \notin N$.

Die Subtraktion hängt eng mit der Tatsache zusammen, dass es Zahlen unterschiedlichen Vorzeichens gibt. Zu jeder von 0 verschiedenen reellen Zahl gibt es eine andere, die sich von ersterer nur durch das Vorzeichen unterscheidet. So bilden z.B. 7 und -7 ein Paar von Zahlen, die "zueinander negativ" sind. Ihre Summe ist 0. Wir bezeichnen das "Umdrehen des Vorzeichens" mit einem vorangestellten Minuszeichen, schreiben also z.B.

zum "Umdrehen des Vorzeichens" $-(-7) = 7$.

Mit dieser Definition kann jede Differenz als Summe dargestellt werden. So gilt etwa: $13 - 12 = 13 + (-12)$,
sodass sich das Subtrahieren gewissenmaßen als Spezialfall des Addierens herausstellt.

Beachten Sie bitte beim Rechnen: Das Minuszeichen kann insgesamt drei verschiedene Rollen spielen: in -7 ist es ein Vorzeichen (das uns sagt, dass -7 eine negative Zahl ist), in 13 - 12 ist es ein Operationszeichen (das uns auffordert, die beiden Zahlen zu subtrahieren), und schließlich bedeutet ein Minuszeichen vor einer reellen Zahl, dass ihr Vorzeichen geändert werden soll. Letzteres bedeutet, auf die reelle Zahl -7 angewandt, dass $-(-7) = 7$ ist! Auf eine positive Zahl, etwa 3, angewandt, fallen die erste und die dritte Rolle zusammen: die Zahl -3 ist natürlich jene, die aus 3 durch "Vorzeichenumdrehen" hervorgeht.

Addition:	Summand + Summand = Summe	
$a + b = b + a$	$3 + 4 = 4 + 3$	Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) der Addition
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(3+4) + 5 = 3 + (4 + 5)$	Assoziativgesetz der Addition
$a + 0 = a$	$3 + 0 = 3$	
$a + (-a) = 0$	$3 + (-3) = 0$	Gegenzahl

Subtraktion:	Minuend - Subtrahend = Differenz (Umkehrung der Addition (Addition der Gegenzahl))	
$a + x = b \rightarrow x = b - a$	$7 + x = 10 \rightarrow x = 10 - 7 = 3$	
ACHTUNG: $4 – 3 = 1$ **ABER** $3 – 4 = -1$		**ACHTUNG: Vertauschungsgesetz gilt NICHT**

II Rechenarten zweiten Stufe:

Neben der Addition gibt es noch die Multiplikation als grundlegende Operation für reelle Zahlen. Wenn man will, kann man sie auf die Addition zurückführen, doch das ist nur für die natürlichen Zahlen leicht. So kann etwa das dreifache Addieren der Zahl 7, also 7 + 7 + 7, auch als

$$3 \times 7 \qquad \text{oder} \qquad 3 \cdot 7$$

geschrieben werden. Wir wollen es uns aber nicht unnötig schwer machen, sondern voraussetzen, daß zwei beliebige reelle Zahlen multipliziert werden können, und dass das Produkt wieder eine reelle Zahl ist, z.B.

$$2.3 \times 7.6 = 17.48$$

(dabei heißen 2.3 und 7.6 Faktoren). Wann immer keine Missverständnisse zu befürchten sind, kann das Symbol × bzw der Punkt · weggelassen werden. Das ist insbesondere der Fall, wenn Symbole (Buchstaben) stellvertretend für Zahlen angeschrieben werden. So bedeutet

a b einfach "a mal b".

Das Verhalten negativer Zahlen in einem Produkt wird durch die Beispiele

$$2.3 \times (-7.6) = -17.48 \qquad (-2.3) \times (-7.6) = 17.48$$

illustriert. Zwei Minuszeichen "heben einander auf". Dabei handelt es sich um eine (für Rechenzwecke) äußerst sinnvolle Vorschrift:

- plus mal plus ist plus (+) * (+) = (+) 3 * 4 = 12
- minus mal plus ist minus (-) * (+) = (-) (-3) * 4 = (-12)
- plus mal minus ist minus (+) * (+) = (-) 3 * (-4) = (-12)
- minus mal minus ist plus (-) * (-) = (+) (-3) * (-4) = (12)

Die Multiplikation kann vollständig innerhalb der kleineren Zahlenmengen N, N_0, Z und Q durchgeführt werden: Das Produkt zweier natürlicher (ganzer, rationaler) Zahlen ist wieder eine natürliche (ganze, rationale) Zahl.

Die Zahlen 0 und 1 spielen bezüglich der Multiplikation eine besondere Rolle: Die Multiplikation mit 1 "ändert nichts", z.B.

$$3 \times 1 = 3,$$

und die Multiplikation mit 0 "macht alles zu 0", z.B.

$$3 \times 0 = 0.$$

Aus der Multiplikation leitet sich (als "Umkehrung", ähnlich wie die Subtraktion aus der Addition) eine weitere Operation ab: die Division. Wir veranschaulichen sie anhand eines Beispiels: Der Quotient

$$3 / 2$$

ist definiert als die Antwort auf die Frage

"2 × wieviel = 3?"

oder, ein bißchen schlampig ausgedrückt: "Wie oft paßt 2 in 3 hinein?" Die Antwort lautet 1.5, und daher ist 3/2 = 1.5. Die Division kann also vollständig auf die Multiplikation zurückgeführt werden.

Obiger Quotient kann auch als 3:2 bzw. 3/2 geschrieben werden, aber wir ziehen die Schreibweise als Bruch vor (wobei die Zahl über dem Bruchstrich als Zähler, die Zahl unter dem Bruchstrich als Nenner bezeichnet wird). Weiters ist es nicht immer sinnvoll, einen Bruch sogleich in seine Dezimaldarstellung zu verwandeln. Im obigen Fall ist die Angabe 3/2 sogar für viele Zwecke günstiger als die Angabe 1.5, denn was mit 3/2 gemeint ist, ist völlig klar, während die Angabe 1.5 mitunter den Verdacht aufkommen lässt, es handle sich nur um einen Näherungswert.

Außerdem lässt sich für viele Zwecke der Schulmathematik mit Brüchen besser weiterrechnen als mit Dezimalzahlen. Das Umwandeln von Brüchen in die Dezimaldarstellung sollte, falls überhaupt nötig, möglichst erst am Ende von Problemlösungen stattfinden.

Im Unterschied zur Subtraktion gibt es im Fall der Division eine extrem wichtige Einschränkung:

Die Division durch 0 ist nicht definiert!

Betrachten wir die Angelegenheit genauer: Macht ein Quotient wie 1/0 einen Sinn? Die zu dieser Division gehörende Fragestellung ist: 0 × wieviel = 1? Nun haben wir oben festgestellt, dass jede Multiplikation mit 0 wieder 0 ergibt - und daher nie 1 ergeben kann (und auch keine andere Zahl, die von 0 verschieden ist)!

Wenn die Division als "Umkehrung" der Multiplikation aufgefasst wird (wie wir es hier tun), dann ist damit schlicht und einfach nicht festgelegt (nicht definiert), was eine Division durch 0 sein soll. Manchmal wird das so ausgedrückt, dass die Division durch 0 "verboten" ist oder dass sie keinen Sinn macht. Auch die Frage "Wie oft passt 0 in 1 hinein?" hilft hier nicht weiter - außer, dass sie suggeriert, 1/0 sei "unendlich" (oder " minus unendlich"). Tatsächlich kann diese Lücke nicht sinnvoll ausgefüllt werden, und wir halten fest, dass in mathematisch korrekten Ausdrücken nie eine Division durch Null (auch nicht eine der Form 0/0) auftreten darf.

Durch jede von Null verschiedene reelle Zahl darf dividiert werden. Wird 1 durch eine solche Zahl dividiert, so erhält man deren Kehrwert (reziproken Wert). Beispiel:

1 / 3 ist der Kehrwert von 3.

Das Bilden des Kehrwerts hat - wie das "Vorzeichenumdrehen" - die Eigenschaft, nach zweimaliger Anwendung die ursprüngliche Zahl zurückzuliefern. So ist nicht nur 1/3 der Kehrwert von 3, sondern auch 3 der Kehrwert von 1/3. Der Kehrwert von 1 ist wieder 1. Ebenso ist Kehrwert von -1 wieder -1. (-1 und 1 sind die einzigen Zahlen, die mit ihrem Kehrwert übereinstimmen). Da die Division durch 0 nicht definiert ist, besitzt 0 keinen Kehrwert, und es gibt keine reelle Zahl, deren Kehrwert 0 wäre.

Mit Hilfe des Kehrwerts kann ein Quotient immer als Produkt dargestellt werden. So ist z.B.

12 / 3 = 12 × 1 / 3

Dividieren durch eine reelle Zahl ist dasselbe wie Multiplizieren mit ihrem Kehrwert.

Die Division kann vollständig innerhalb der kleineren Zahlenmenge Q durchgeführt werden: Der Quotient zweier rationaler Zahlen (mit Nenner ≠ 0) ist wieder eine rationale Zahl. Aus den Mengen N und Z kann die Division allerdings hinausführen: So ist etwa 3 □ N und 2 □ N, aber 3/2 = 1.5 ∉ N.

Multiplikation:	Faktor · Faktor = Produkt	
a·b = b·a	3 * 4 = 4 * 3	Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) der Multiplikation
(a·b)·c = a·(b·c)	(3 * 4) * 5 = 3 * (4 * 5)	Assoziativgesetz der Multiplikation
a·(b + c) = a·b + a·c	3*(4 + 5) = 3*4 + 3 *5	Assoziativgesetz der Multiplikation
a·1 = a	3*1 = 3	Jede Zahl mal 1 ergibt die Zahl
1/a ist der Kehrwert zu a	1/3 ist der Kehwert zu 3	Kehrwert: 1/a
a·(1/a) = 1	1 * (1/3) = 1	Jede Zahl mal Kehrwert ist 1
a·0 = 0	3 *0 = 0	Jede Zahl mal 0 = 0

Division:	Dividend / Divisor = Quotient Umkehrung der Multiplikation (Multiplikation mit dem Kehrwert)	
a * x = b → x = b / a	5 * x = 10 → x = 10 / 5 = 2	
ACHTUNG: 12 – 3 = 4 **ABER** 12 – 3 = ¼		**ACHTUNG: Vertauschungsgesetz gilt NICHT**

III Rechenarten dritter Stufe:

Potenzieren	Basis$^{\text{Hochzahl (Exponent)}}$ = Potenz	
x^n = x*x*x*….x (n-mal)	2^3= 2*2*2 =8	2 hoch 3 = 2*2*2 =8
	3^3 = 3*3*3 = 8	3 hoch 3 = 3*3*3 = 27
	5^2 = 5*5 = 25	5 hoch 2 = 5*5 = 25
X^0 =1	5^0 = 1	**WICHTIG: Jede Zahl hoch 0 ist 1**

IV Reihenfolge der Rechenoperationen:

Rechenarten höherer Stufe werden immer zuerst ausgeführt (Potenzieren vor Punktrechnung vor Strichrechnung").

Rechenarten gleicher Stufe werden in der Reihenfolge ausgeführt, in der sie aufgeschrieben sind, z.B. $60:10 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$.

Was in Klammern steht, wird zuerst berechnet.

Übungsbeispiele:

Übung Ü1:

a)	$5 \cdot 12 + 4 \cdot 25 =$	b)	$240:20 - 5 \cdot 2 =$	c)	$20 \cdot 8 + 32:16 - 12 \cdot 5 =$
	$(5 \cdot 12 + 4) \cdot 25 =$		$240:(20 - 5) \cdot 2 =$		$20 \cdot (8 + 32):(16 - 12) \cdot 5 =$
	$5 \cdot (12 + 4) \cdot 25 =$		$240:(20 - 5 \cdot 2) =$		$20 \cdot (8 + 32:16) - 12 \cdot 5 =$
	$5 \cdot (12 + 4 \cdot 25) =$		$(240:20 - 5) \cdot 2 =$		$(20 \cdot 8 + 32):(16 - 12) \cdot 5 =$
					$20 \cdot [8 + 32:(16 - 12)] \cdot 5 =$
					$[(20 \cdot 8 + 32):16 - 12] \cdot 5 =$

Lösung: a) 160 1600 2000 560
b) 2 32 24 14
c) 102 1000 140 240 1600 0

Übung Ü2:

a)	$4 + 5 \cdot 3^2 =$	b)	$2 \cdot 3 - 1^2 =$	c)	$3^3 - 2^3 + 4^2 =$
	$(4 + 5) \cdot 3^2 =$		$2 \cdot (3 - 1)^2 =$		$(3 - 2)^3 + 4^2 =$
	$4 + (5 \cdot 3)^2 =$		$2 \cdot (3 - 1^2) =$		$3^3 - (4 - 2)^3 =$
	$(4 + 5 \cdot 3)^2 =$		$(2 \cdot 3 - 1)^2 =$		$(3^2 - 2^2)^3 =$
	$[(4 + 5) \cdot 3]^2 =$		$[2 \cdot (3 - 1)]^2 =$		$(3^3 - 2^3)^2 =$

Lösung: 49 81 229 361 729
b) 5 8 4 25 16
c) 35 17 19 125 361

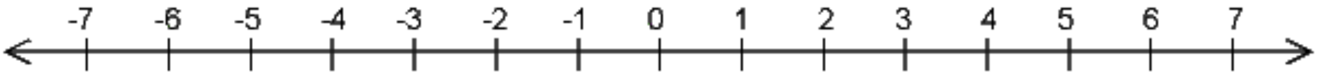
Übung Ü3:

a)	$(+6) \cdot (-4) + (+4) \cdot (+10) - (+2) \cdot (-5) =$	b)	$4.\ 2^3 - (-2)^3 =$
	$(-6) \cdot (-4) - (+4) \cdot (-10) + (-2) \cdot (-5) =$		$(-5)^3 + (-5)^2 =$
	$[(+6) \cdot (-4) + (+4)] \cdot (+10) - (+2) \cdot (-5) =$		$-3^3 - (-3)^2 =$
	$(+6) \cdot [(+4) + (-4) \cdot (-10)] - (-2) \cdot (-5) =$		$(+1) - (-2) \cdot (-1)_4 =$
	$(-6) \cdot (+4) + (-4) \cdot [(+10) + (+2) \cdot (-5)] =$		$(+1) - [(-2) \cdot (-1)]_4 =$
	$[(-6) \cdot (-4) - (+4)] \cdot [(-10) + (+2)] \cdot (+5) =$		$[(+1) - (-2) \cdot (-1)]_4 =$

Lösung: a)26 74 -190 254 -24 -800
b)16 -100 -36 3 -15 1

V Negative Zahlen

Weil sich innerhalb der natürlichen Zahlen nicht alle Subtraktionen ausführen lassen (z.B. 3 - 5), erweitert man den Zahlenraum um die negativen Zahlen. Das kann man sich schön mit Hilfe der Zahlengeraden veranschaulichen:



Je größer eine Zahl ist, umso weiter rechts liegt sie auf der Zahlengeraden. Der Abstand einer Zahl vom Nullpunkt heißt Betrag (oder Absolutbetrag). Er ist immer positiv. Zahlen, die denselben Betrag, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben (wie +3 und -3), nennt man Gegenzahlen.

Addition und Subtraktion

Beim Addieren einer positiven Zahl geht man auf der Zahlengeraden nach rechts, beim Addieren einer negativen Zahl nach links. Eine Zahl wird subtrahiert, indem man ihre Gegenzahl addiert. Das ergibt folgende Rechenregeln:

$+(+a) = -(-a) = +a$

$+(-a) = -(+a) = -a$

Multiplikation und Division

Multipliziert man eine Zahl mit einer negativen Zahl so ändert sich ihr Vorzeichen. Daher ergeben sich folgende Rechenregeln:

$+a)\cdot(+b) = (-a)\cdot(-b) = +ab$

$(+a)\cdot(-b) = (-a)\cdot(+b) = -ab$

Die Regeln für die Division sind ganz analog.

Potenzieren

a^n, wenn n gerade z.B.: $(-2)^4 = (2)^4=16$

$(-a)^n$

$-a^n$, wenn n ungerade z.B.: $(-2)^3 = -(2)^3=-8$

Der Betrag einer Zahl

ist immer positiv, z.B.: $|+3| = |-3| = 3$
Betragsstriche ersetzen eine Klammer!
Beispiel: $|(+3)+(-8)|\cdot(-2) = |-5|\cdot(-2) = 5\cdot(-2) = -10$

Übungsbeispiele:

Übung Ü4:

a. (+10) + (-6) - (+7) =
b. (+15) - (-9) + (-12) =
c. (-21) - (+8) + (+11) =
d. (-9) + (+16) - (-10) =
e. (+48) - (+23) - (-52) - (+5) =
f. (-75) + (+15) - (-36) - (+6) =
g. (+ 91) + (-70) - (+14) + (-30) =
h. (-64) - (+12) - (-80) -(-18) =

Lösung: a) -3 b) +12 c) -18 d) +17 e) +72 f) -30 g) -23 h) +22

Übung Ü5:

a. (+8,5) + (+7,3) - (+4,5) =
b. (-11,2) - (-2,75) + (+0,23) =
c. (+100) + (-25,09) - (+6,31) =
d. (+7,5) - (+22) - (-5,17) =
e. (+0,36) - (+2,7) - (+0,3) - (-1,64) =
f. (-12,5) + (+7,5) + (-0,15) + (+80) =
g. (+ 20,01) - (+3,5) - (-0,9) + (-6,11) =
h. (+2,75) + (-12,5) - (-3,15) - (+0,01) =

Lösung: a) +11,3 b) -8,22 c) +68,6 d) -9,33 e) -1 f) +74,85 g) +11,3 h) -6,61

Übung Ü6:

a. (-6) + (-7) - [(+11) - (-5)] =
b. (+18) - [(+5) + (-29)] - (+9) =
c. [(-27) - (-12)] + [(+5) - (+14)] =
d. (+108) - [(-42) + (+16) - (-14)] =
e. [(+2,5) - (+3,8)] - [(-0,25) + (+3,75)] =
f. (+10,8) - [(-1,55) + (+0,35)] + (-0,08) =
g. (-111) + [(+2,5) - (-12) + (-5,2)] =
h. (+7,5) - (+19) - [(+1,03) - (-22,47)] =

Lösung: a) -29 b) +33 c) -24 d) +120 e) -4,8 f) +11,92 g) -101,7 h) -35

Übung Ü7:

a. (+6)·(-4) + (+4)·(+10) - (+2)·(-5) =
b. (-6)·(-4) - (+4)·(-10) + (-2)·(-5) =
c. [(+6)·(-4) + (+4)]·(+10) - (+2)·(-5) =
d. (+6)·[(+4) + (-4)·(-10)] - (-2)·(-5) =
e. (-6)·(+4) + (-4)·[(+10) + (+2)·(-5)] =
f. [(-6)·(-4) - (+4)]·[(-10) + (+2)]·(+5) =

Lösung: a) +26 b) +74 c) -190 d) +254 e) -24 f) -800

Übung Ü8:

a. $(+0{,}25)\cdot(-1{,}2) + (-2{,}5)\cdot(-3{,}6) =$
b. $(-1{,}75)\cdot(+8) - (+1{,}01)\cdot(-12) =$
c. $(-12{,}5) + (-1{,}5)\cdot[(+8{,}2) - (+2{,}8)] =$
d. $[(-12{,}5) + (-1{,}5)]\cdot[(+8{,}2) - (+2{,}8)] =$
e. $[(-0{,}9)\cdot(-7) - (+1{,}8)]\cdot(+0{,}04) =$
f. $(-0{,}9)\cdot[(-7{,}91) - (+1{,}8)\cdot(+0{,}05)] =$

Lösung: a) +8,7 b) - 1,88 c) -20,6 d) -75,6 e) +0,18 f) +7,2

Übung Ü9:

a. $(-36):(+9) - (+21):(-7) =$
b. $(+9):(-12) + (-15):(-6) =$
c. $[(-96):(-8) + (+4)]\cdot(+6) =$
d. $(-96):[(-8) + (+4)\cdot(+6)] =$
e. $(-96):[(-8) + (+4)]\cdot(+6) =$
f. $[(+120) + (-43)]:[(-40) - (-18)] =$

Lösung: a) -1 b) +1,75 c) +96 d) -6 e) +144 f) -3,5

Übung Ü10:

a. $2^3 - (-2)^3 =$
b. $3^2 - (-3)^2 =$
c. $(-5)^3 + (-5)^2 =$
d. $-3^2 + (-3)^2 =$
e. $(+3) + (-5)^2 =$
f. $[(+3) + (-5)]^2 =$
g. $(-1)\cdot(-7)^2 =$
h. $[(-1)\cdot(-7)]^2 =$
i. $(+1) - (-2)\cdot(-1)^4 =$
j. $(+1) - [(-2)\cdot(-1)]^4 =$
k. $[(+1) - (-2)\cdot(-1)]^4 =$
l. $[-3^2 - (-2)^3]^5 =$

Lösung: a) +16 b) 0 c) -100 d) 0 e) +28 f) +4 g) -49 h) +49 i) +3 j) -15 k) +1 l) -1

Übung Ü11:

a. $|(+20)|\cdot(-5) - |(-15)|\cdot(+6) =$
b. $|(+20)\cdot(-5)| - |(-15)\cdot(+6)| =$
c. $(+20)\cdot |(-5) - (-15)| \cdot(+6) =$
d. $|(+20)\cdot(-5) - (-15)| \cdot |(+6)| =$
e. $[\, |(-1{,}5)| - |(+4)|\,] \cdot (-8) =$
f. $|(-1{,}5) - (+4)| \cdot |(-8)| =$

Lösung: a) -190 b) +10 c) +1200 d) +510 e) +20 f) +4